

เรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหา*

อาจารย์ทรงชัย อักษรคิด**

feduscu@ku.ac.th

การแก้ปัญหาคือกระบวนการค้นหาคำตอบที่ผู้แก้ปัญหาไม่รู้วิธีการซึ่งนำไปสู่คำตอบล่วงหน้ามาก่อน โดยในกระบวนการหาคำตอบนั้นผู้แก้ปัญหาคงต้องดึงเอาความรู้และศักยภาพที่ตนเองมีออกมาใช้สำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหานั้น นักเรียนจะต้องพัฒนาความเข้าใจแนวคิดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์อยู่เสมอ นักเรียนควรได้รับโอกาสอยู่บ่อยๆ และต่อเนื่องในการคิดวางแผน เพื่อพยายามอดทน และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนต่างๆ โดยมีครูเป็นผู้สนับสนุนให้นักเรียนได้สะท้อนความคิดเห็นของตนเองออกมา

การเรียนรู้การแก้ปัญหาในคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนควรได้แนวทางต่างๆ อย่างหลากหลายของการคิด ควรมีคุณลักษณะไม่ย่อท้อ มีความใฝ่รู้ กระตือรือร้น รวมทั้งมีความมั่นใจในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยต่างๆ โดยจะเป็นประโยชน์แก่นักเรียนได้แม้จะไม่ได้อยู่ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ที่โรงเรียนก็ตาม การเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีนั้นสามารถนำไปสู่สถานภาพที่ดีในชีวิตประจำวันภายนอกห้องเรียน ในชุมชนสังคม หรือในสถานที่ทำงานต่างๆ ภายภาคหน้าของนักเรียนต่อไปได้

* บทความนี้ได้ตีพิมพ์ในนิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATHS ปีที่ 3 ฉบับที่ 6-7 เล่มที่ 30-31 เดือนกรกฎาคม-สิงหาคม 2550

** อาจารย์ประจำสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ครูผู้สอนควรนำการแก้ปัญหาสอดแทรกอยู่กับการเรียนเนื้อหาสาระทั้งหมดของคณิตศาสตร์ ไม่ควรแยกการแก้ปัญหาออกมาเรียนเป็นเนื้อหาเพียงเรื่องหนึ่ง หรือเป็นบทเรียนบทหนึ่งโดดๆ ในคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาในคณิตศาสตร์ควรสอดแทรกรวมอยู่ในสาระการเรียนรู้ทั้ง 5 สาระในหลักสูตร (สาระที่ 1 : จำนวนและการดำเนินการ สาระที่ 2 : การวัด สาระที่ 3 : เรขาคณิต สาระที่ 4 : พีชคณิต และสาระที่ 5 : การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น) เนื้อเรื่องหรือสถานการณ์ที่อยู่ในปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่างๆ นั้น ครูผู้สอนสามารถสร้างขึ้นมาอย่างหลากหลายได้จากประสบการณ์ที่คุ้นเคยในชีวิตจริงของนักเรียน ทั้งในชีวิตประจำวันทั้งที่โรงเรียนและภายนอกโรงเรียน ครูก็สามารถนำเอามาประยุกต์ใช้สร้างเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์รอบตัวหรือในโลกของการทำงาน ครูผู้สอนพึงระลึกไว้ประการหนึ่งว่า ปัญหาที่ดีจะต้องบูรณาการเรื่องต่างๆ หลากๆ เรื่องไว้ด้วยกันในตัวปัญหา และนั่นจะเป็นการสะท้อนให้นักเรียนเห็นถึงความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์



สร้างความรู้ใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหา

คำถามของครูผู้สอนข้อหนึ่งคือ ในการลงมือปฏิบัติการสอนจริงๆ แล้วนั้น ครูจะนำการแก้ปัญหาไปช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างไร...? ซึ่งแน่นอนว่าปัญหาที่ดีจะทำให้เด็กมีโอกาสเติมเต็มและขยายศักยภาพต่างๆ ที่นักเรียนได้เรียนรู้

ในระดับประถมศึกษา แนวคิด (concept) ทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่สามารถได้รับการแนะนำผ่านปัญหาต่างๆ ที่มาจากโลกของเด็กได้ ยกตัวอย่างเช่น สมมุติว่านักเรียนชั้น ป.4 สงสัยและต้องการค้นหาว่าเพื่อนๆ นักเรียนของตนทั้งเด็กหญิงและเด็กชายในชั้น ป.4 ทั้ง 6 ห้องเรียนนี้ ใส่รองเท้านักเรียนเบอร์อะไรกันบ้าง...? และรองเท้านักเรียนยี่ห้ออะไรที่เป็นที่นิยมใส่กันมากที่สุด...? ในการแก้ปัญหานี้เด็กจะต้องเรียนรู้จากการลงมือสำรวจปฏิบัติจริง โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล การบันทึกข้อมูล การนำเสนอข้อมูล และใช้ทักษะการบวก การเปรียบเทียบจำนวนต่างๆ อย่างถูกต้อง

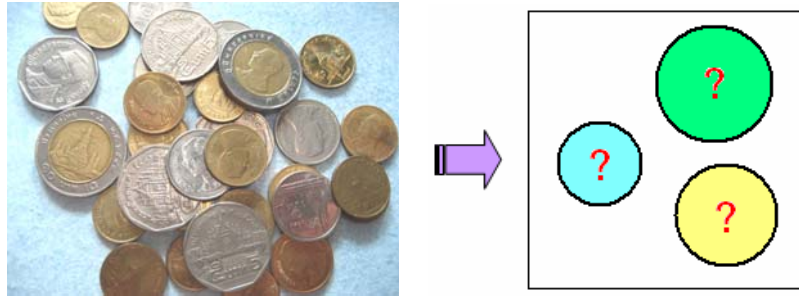


ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แนวคิดในเรื่องสัดส่วนอาจได้รับการแนะนำผ่านการสำรวจของนักเรียน ยกตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนทำสูตรน้ำส้มปั่นเพื่อเปิดร้านขาย ซึ่งให้ส่วนผสมระหว่างน้ำเชื่อมกับน้ำส้มคั้นในปริมาณต่างๆ แล้วให้นักเรียนร่วมกันกำหนดรสชาติที่อร่อยถูกใจและเป็นมาตรฐานของน้ำส้มปั่นนั้น (เช่น กำหนดน้ำเชื่อม 2 ช้อนโต๊ะ กับน้ำส้มคั้น 5 ช้อนโต๊ะ ในการทำน้ำส้มปั่น 1 แก้ว เป็นมาตรฐานของรสชาติในการขาย) เนื่องจากในการขายน้ำส้มปั่นบางครั้งต้องปั่นครั้งเดียวให้ได้ 2 แก้ว 3 แก้ว หรือ 4 แก้วจึงจะรวดเร็วตามที่ลูกค้าสั่ง ดังนั้นปัญหานี้จึงยากสำหรับนักเรียนที่ไม่เข้าใจในเรื่องสัดส่วน แต่หากครูผู้สอนใช้ความคิดและพยายามใช้คำถามเพื่อการแนะนำที่ดีแก่นักเรียนแล้ว ในท้ายที่สุดก็ส่งผลให้นักเรียนต้องใช้ความรู้ในเรื่องสัดส่วนในการทำน้ำส้มปั่นแบบไม่รู้ตัวได้



ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลายๆ เนื้อหาของหลักสูตรก็สามารถได้รับการแนะนำผ่านปัญหาต่างๆ จากเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์หรือการประยุกต์ใช้ การแก้ปัญหาควรได้รับการนำไปใช้เพื่อช่วยให้นักเรียนพัฒนาความคล่องแคล่วในทักษะกระบวนการที่สำคัญต่างๆ ยกตัวอย่างเช่น ครูอาจกำหนดสถานการณ์ปัญหาถามนักเรียนต่อไปนี้

ในกระเป๋าทางเกงของครูมีเหรียญเงินประเภทต่างๆ อยู่มากมาย มีทั้งเหรียญสิบบาท เหรียญห้าบาท เหรียญสองบาท เหรียญหนึ่งบาท เหรียญห้าสิบบาท และเหรียญยี่สิบบาท แต่ครูไม่รู้หรือว่าจำนวนเหรียญของแต่ละประเภทมีอยู่เท่าไร ถ้าครูล้วงหยิบขึ้นมา 3 เหรียญจากกระเป๋าทางเกง จำนวนเงินรวมของทั้งสามเหรียญจะเป็นกี่บาทได้บ้าง...?



การแก้ปัญหาที่ดูเหมือนว่านักเรียนจะใช้ความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นเพียงแค่เรื่องค่าของเงินประเภทต่างๆ และความเข้าใจเกี่ยวกับการบวกเท่านั้นซึ่งเป็นเรื่องพื้นฐานสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายอยู่แล้ว แต่เป้าหมายทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญของปัญหานี้กลับอยู่ที่การให้นักเรียนฝึกคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ รวมทั้งการจัดการและการเขียนนำเสนอการคิดของนักเรียน

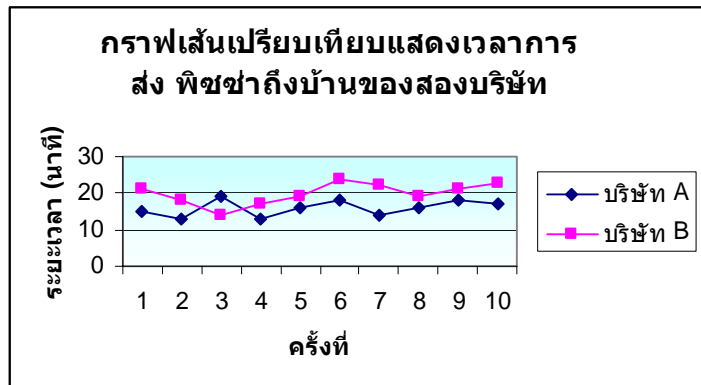
บทบาทของครูในการเลือกปัญหาและงานทางคณิตศาสตร์ที่ดีนั้นเป็นสิ่งที่สำคัญมาก การวิเคราะห์และการปรับเปลี่ยนปัญหา การคาดหวังให้ความคิดทางคณิตศาสตร์สามารถแสดงออกมาได้ในการแก้ปัญหา และการคาดหวังให้นักเรียนรู้จักการตั้งคำถามต่างๆ ด้วยตนเอง สิ่งต่างๆ เหล่านี้ครูสามารถตัดสินใจเลือกปัญหาที่เหมาะสมที่จะช่วยเพิ่มเติมเป้าหมายทางคณิตศาสตร์ในห้องเรียนได้ ความจริงแล้วมีปัญหามากมายที่น่าสนใจและน่าจะทำให้นักเรียนเรียนด้วยความสนุก แต่นั่นไม่ได้หมายความว่า จะนำไปสู่การพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในห้องเรียนเสมอไป การเลือกสถานการณ์ปัญหาอย่างชาญฉลาด รวมทั้งการใช้และการดัดแปลงปัญหาจากเนื้อหาสาระทางการเรียนการสอนนี้ นับว่าเป็นส่วนที่ยากพอควรสำหรับครูคณิตศาสตร์

แก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในคณิตศาสตร์รวมทั้งในเนื้อหาวิชาอื่นๆ

ผู้ที่มีมองโลกเป็นคณิตศาสตร์ มักจะได้รับการขนานนามว่ามี **“ลักษณะนิสัยเป็นคณิตศาสตร์”** ซึ่งนักแก้ปัญหาที่ดีโดยธรรมชาติแล้วมักจะคิดวิเคราะห์สถานการณ์ต่างๆ อย่างระมัดระวังและรอบคอบในบริบททางคณิตศาสตร์ และคิดตั้งปัญหาขึ้นมาภายใต้สถานการณ์ที่พวกเขาพบเห็น

ในช่วงแรกๆ ของการฝึกแก้ปัญหา นักแก้ปัญหามักจะพิจารณาในกรณีง่ายๆ ก่อนที่จะพยายามทำในสิ่งที่ยุ่งยากสลับซับซ้อนมากขึ้น โดยพวกเขาจะพิจารณาถึงประสบการณ์การคิดวิเคราะห์ที่เคยทำผ่านมามากมายอย่างง่าย ๆ ของตนเองก่อน

ตัวอย่างเช่น งานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่น่าเสนอข้อมูลในชีวิตจริงเกี่ยวกับการส่งพัสดุถึงบ้าน (delivery) ของสองบริษัท และถามว่าบริษัทไหนที่ให้บริการส่งพัสดุได้ดีกว่ากัน...? คำตอบที่ได้มาส่วนมากของนักเรียนมักจะมองไปที่ **“ระยะเวลาเฉลี่ย”** ที่ลูกค้าต้องคอยพนักงานส่งของของแต่ละบริษัท ว่าบริษัทใดจะนำพัชามาส่งได้ถูกต้องตรงเป้าหมาย (ไม่หลงทาง) และรวดเร็วกว่ากัน



จากตัวอย่างปัญหาข้างต้นนักเรียนต้องใช้การคิดวิเคราะห์และการประเมินตัดสินใจในข้อมูลที่ตนเองมีอย่างระมัดระวัง นักเรียนสามารถนำความรู้ในคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือเพื่อตอบโจทย์นี้ได้ โดยใช้ความสามารถเกี่ยวกับการรวบรวมข้อมูล การลงจุด (plotting) และการสร้างกราฟระหว่างตัวแปร “ระยะเวลา (นาที)” และ “ครั้งที่ใช้บริการ” ของทั้งสองบริษัท ซึ่งจำเป็นต้องมีจำนวนข้อมูลมากพอให้เห็นแนวโน้มและความแตกต่างสำหรับการลงสรุปได้

การลงมือปฏิบัติงานจริงของนักเรียนในลักษณะดังกล่าวจะบ่มเพาะลักษณะนิสัยในการคิดวิเคราะห์อย่างรอบคอบของนักเรียน และจะนำไปสู่ความรู้ความเข้าใจที่สมบูรณ์ในสถานการณ์ที่เกิดขึ้น ครูผู้สอนสามารถช่วยสร้างลักษณะนิสัยเหล่านี้สำหรับนักเรียนทุกระดับชั้นได้โดยใช้การถามคำถามต่างๆ ที่ช่วยให้นักเรียนค้นหาคณิตศาสตร์ในโลกและประสบการณ์ของตนเอง และโดยการสนับสนุนให้กำลังใจนักเรียนไม่ให้ย่อท้อกับปัญหาต่างๆ ที่น่าสนใจและท้าทายความสามารถ

การตั้งปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตของนักเรียนและอย่างเป็นธรรมชาติของเด็กเล็กๆ เช่น

- ฉันแปลกใจว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าไรในการนับหนึ่งจนถึงหนึ่งล้าน...?
- ฉันอยากรู้ว่าโทรทัศน์ช่องใดที่มีรายการที่เหมาะสมสำหรับเด็ก (2-12 ปี) มากกว่ากัน และ

ช่องใดที่มีรายการเฉพาะที่ไม่เหมาะแก่เด็กและเยาวชนมากกว่ากัน...?



ครูและผู้ปกครองสามารถสนับสนุนให้นักเรียนได้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากโลกของพวกเขา ครูเป็นผู้แสดงบทบาทที่สำคัญในการพัฒนาลักษณะนิสัยการแก้ปัญหาของนักเรียนได้โดยการสร้างและดำรงรักษาสภาพแวดล้อมต่างๆ ในห้องเรียน เริ่มตั้งแต่เด็กเล็กๆ ระดับปฐมวัยซึ่งเป็นวัยที่ควรได้รับการสนับสนุนให้สำรวจ ให้ลองเสี่ยง แบ่งปันความสำเร็จและความผิดพลาดต่างๆ แก่เพื่อนนักเรียนด้วยกัน รวมทั้งการใช้คำถามที่ดีของครูในอันที่จะกระตุ้นกระบวนการคิดของนักเรียน นักเรียนจะพัฒนาความเชื่อมั่นในความสามารถของตน และเต็มใจที่จะสำรวจปัญหาต่างๆ ซึ่งเป็นไปได้ที่พวกเขาอาจจะตั้งปัญหาขึ้นมาเองจากความสงสัยของตน และแก้ปัญหาที่ทำทายนั้นได้อย่างไม่ย่อท้อ

ปรับใช้ความหลากหลายของยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

มีนักการศึกษาคณิตศาสตร์หลายท่านที่กล่าวถึงยุทธวิธีต่างๆ ในการแก้ปัญหา โดยผู้ที่มีผลงานเป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขวางและเป็นที่ยอมรับกันเป็นอย่างดีคือ **จอร์จ โพลยา** (George Polya, 1887-1985) ยุทธวิธีที่กล่าวถึงบ่อยๆ ได้แก่

- การใช้แผนภาพ (using diagrams)
- การมองแบบรูป (looking for patterns)
- การเขียนสิ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมด (listing all possibilities)
- การพยายามหาค่าหรือกรณีพิเศษ (trying special values or cases)
- การทำย้อนกลับ (working backward)
- การเดาและตรวจสอบ (guessing and checking)
- การสร้างปัญหาที่คล้ายกัน (creating an equivalent problem)
- การทำปัญหาให้ง่ายลง (creating a simpler problem)



George Polya

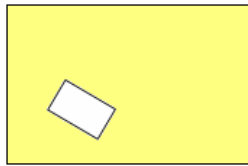
คำถามที่เกิดขึ้นอย่างแน่นอนสำหรับครูผู้สอนก็คือ เราจะสอนยุทธวิธีต่างๆ เหล่านี้ได้อย่างไร...? ครูจะต้องใส่ใจจริงๆ จังๆ หรือไม่ และจะบูรณาการกับเนื้อหาในหลักสูตรคณิตศาสตร์อย่างไร...?

ผู้เขียนขอยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาตัวอย่างหนึ่งเกี่ยวกับการตัดเค้ก เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนว่าเราจะมามีวิธีการสอนการแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีต่างๆ ข้างต้นนั้นได้อย่างไร ดังต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหา

“ทศ” และ “พี” สองพี่น้องกำลังช่วยกันเอาขนมเค้กรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากชิ้นใหญ่ชิ้นหนึ่งออกจากตู้อบและทิ้งให้ขนมเค้กเย็นซักพักหนึ่งก่อนที่จะตัดแบ่งกินกันสองคน โดยการแบ่งจะใช้มีดตัดบนหน้าเค้กเพียงแค่ครั้งเดียวเท่านั้นอย่างยุติธรรม

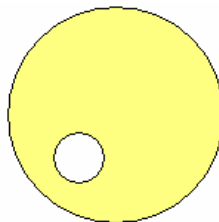
ช่วงเวลาที่ทศและพีกำลังรอรออยู่นั้น ทั้งสองคนไม่อยู่ในห้องทำขนม และเป็นเวลาพอดีที่ “เอก” พี่ชายคนโตเข้ามาในห้องและตัดขนมเค้กเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากชิ้นเล็กๆ ชิ้นหนึ่งไปกิน ด้วยความหิวและรีบเร่ง เอกจึงไม่ได้คิดที่จะตัดที่มุมหรือที่ขอบของขนมเค้ก



เมื่อทศและพีกลับมา พวกเขาจะแบ่งขนมเค้กที่เหลืออยู่อย่างไร ...? โดยใช้วิธีการตัดบนหน้าเค้กเพียงแค่ครั้งเดียวอย่างยุติธรรม

คำตอบของปัญหานี้คงไม่ได้มาแบบทันทีทันใดอย่างแน่นอน ซึ่งตามข้อเสนอแนะของโพลยา ท่านได้แนะนำยุทธวิธีการแก้ปัญหาแบบหนึ่งโดยให้เราพยายามคิดแก้ปัญหาโดยทำปัญหาให้ง่ายลง (creating a simpler problem) หรือใช้ยุทธวิธีการสร้างปัญหาที่คล้ายกัน (creating an equivalent problem) ลักษณะที่สำคัญของปัญหานี้ก็คือรูปร่างของขนมเค้กชิ้นใหญ่และชิ้นเล็กที่ถูกตัดออกไปซึ่งหน้าเค้กเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองชิ้น ดังนั้นครูอาจแนะนำให้นักเรียนคิดแปลกออกไปได้ว่า “ถ้าหน้าเค้กมันไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากล่ะ...? ซึ่งถ้ามันเป็นรูปวงกลมล่ะ...?”

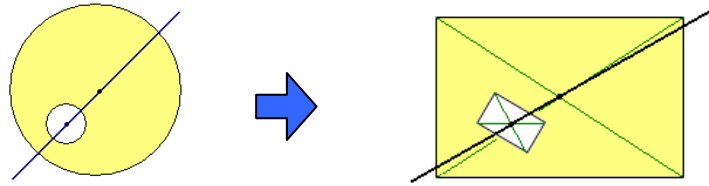
ถ้าเรามีรูปวงกลมวงใหญ่แล้วหักเอาชิ้นส่วนรูปวงกลมวงเล็กข้างในออกไป ดังรูปต่อไปนี้



เราก็จะเห็นว่าวิธีการมันง่ายขึ้นเลยทีเดียวนั่นก็คือทำได้โดยการตัดหนึ่งครั้งให้ผ่านจุดศูนย์กลางของทั้งวงกลมวงเล็กและวงกลมวงใหญ่ ซึ่งเราก็จะได้การแบ่งขนมเค้กรูปวงกลมออกเป็นสองส่วนที่เท่าๆ กัน

จากนั้นก็ให้เรากลับไปหาคำตอบที่ขนมเค้กที่มีหน้าเค้กเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากของเราแล้วพยายามหาจุดศูนย์กลาง (ในที่นี้ก็คือจุดตัดของเส้นทแยงมุม) ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแต่ละรูป แล้วก็ทำการตัดหน้าเค้กให้

ผ่านจุดศูนย์กลางทั้งสองนี้ นั่นก็คือวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีการทำปัญหาให้ง่ายลงหรือการสร้างปัญหาที่คล้ายกันตามที่โพลยาได้แนะนำนั่นเอง



หากเรามองว่ายุทธวิธีการแก้ปัญหาต่างๆ นี้เป็นส่วนประกอบอย่างหนึ่งของเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเราก็ต้องใส่ใจที่จะสอนให้นักเรียนเรียนรู้ถึงการใช้อยุทธวิธีต่างๆ ในการแก้ปัญหา

ในระดับประถมศึกษา ครูผู้สอนสามารถช่วยเด็กแยกประเภทและเปรียบเทียบให้เห็นถึงการใช้ประโยชน์จากยุทธวิธีต่างๆ ได้ ซึ่งโอกาสที่จะใช้อยุทธวิธีต่างๆ ในการแก้ปัญหาก็จะต้องได้รับการปลูกฝังตามธรรมชาติในหลักสูตรผ่านไปยังด้านเนื้อหา และเมื่อนักเรียนเข้าสู่ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนก็ควรได้รับการฝึกทักษะในการย้อนระลึกถึงยุทธวิธีต่างๆ ที่ตนเคยเรียนรู้ผ่านมาแล้ว นำไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหอย่างเหมาะสม และสามารถตัดสินใจได้ว่าจะใช้อยุทธวิธีเหล่านี้เมื่อไรและอย่างไร จนกระทั่งถึงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นักเรียนควรได้รับโอกาสที่จะได้ใช้อยุทธวิธีต่างๆ ที่เปิดกว้าง โดยสามารถตัดสินใจเลือกใช้วิธีการใดวิธีการหนึ่ง และสามารถที่จะปรับเปลี่ยนหรือดัดแปลงให้เป็นยุทธวิธีของตนเองได้

ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์แรกเริ่มที่สุดของเด็กนั้นมาจากการแก้ปัญหา ยุทธวิธีที่แตกต่างเป็นสิ่งจำเป็นในประสบการณ์ของนักเรียนหลังจากที่ได้รับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เปิดกว้างและหลากหลาย นักเรียนจะต้องรู้ถึงยุทธวิธีต่างๆ เหล่านี้เมื่อจำเป็นจะต้องใช้แก้ปัญหา และเมื่อนักเรียนได้ออกมาทำกิจกรรมต่างๆ ในห้องเรียน ครูก็ควรสนับสนุนนักเรียนให้บันทึกสิ่งที่นักเรียนได้ทำไป ตัวอย่างเช่น หลังจากนักเรียนคนหนึ่งออกมาบอกผลลัพธ์และวิธีการที่ตนใช้ ครูอาจจะแสดงหรือระบุยุทธวิธีโดยกล่าวว่า **“มันเหมือนกับว่าหนูได้สร้างการเขียนอย่างเป็นระบบระเบียบในการหาผลลัพธ์นั่นเอง แล้วมีใครที่สามารถจะแก้ปัญหาในวิธีการอื่นๆ ได้อีกไหม...?”** การใช้คำพูดแบบนี้ จะช่วยพัฒนาด้านภาษาและการมีส่วนร่วมที่จะช่วยให้นักเรียนคนอื่น ๆ เข้าใจว่านักเรียนคนดังกล่าวนั้นกำลังทำอะไร ซึ่งคำพูดของครูดังกล่าวยังแนะนำให้ นักเรียนทุกคนเห็นด้วยว่าการแก้ปัญหานี้ๆ นั้น ไม่จำเป็นต้องใช้ได้เพียงยุทธวิธีการหนึ่งใดเพียงแบบเดียว ยุทธวิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหาก็สามารถพัฒนาและปรับเปลี่ยนได้ตลอดเวลาอย่างยืดหยุ่น หากสถานการณ์ปัญหายิ่งซับซ้อนมากขึ้น เราก็อาจจะต้องใช้ยุทธวิธีการใหม่ๆ ที่ดีและละเอียดรอบคอบมากขึ้น

References

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2545). *เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

Juliet A.Jill Baxter, "Some Reflections on Problem Posing : A Conversation with Marion Walter".
in *Teaching Children Mathematics*" Volume 12, Number 3, October 2005, pp.122-128.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.
